Sur les lois de forces centrales faisant décrire à leur point d'application une conique quelles que soient les conditions initiales.

PAR P. APPELL.

On sait que les forces centrales, fonctions de la seule position, faisant toujours décrire à leur point d'application une conique ont été déterminées simultanément par MM. Darboux et Halphen* à la suite d'une question posée par M. Bertrand. Sans prétendre rien ajouter d'essentiel à la solution analytique d'Halphen et à l'exposé que M. Tisserand en a fait dans le premier volume de sa *Mécanique céleste*; je me propose d'indiquer rapidement la méthode que j'ai suivie dans mon cours pour abréger autant que possible le calcul d'Halphen. Cette méthode constitue une application de *l'homographie en mécanique* dont j'ai fait la théorie dans ce Journal (1889).

Considérons un mobile de masse 1, sollicité par une force centrale F_1 dépendant seulement des coordonnées (x_1, y_1) de son point d'application par rapport à deux axes rectangulaires O_1x_1, O_1y_1 ayant pour origine le centre O_1 par lequel passe la force.

Les équations du mouvement sont, en appelant le temps t_1,

$$\frac{d^2x_1}{dt_1^2} = F_1\frac{x_1}{r_1}, \quad \frac{d^2y_1}{dt_1^2} = F_1\frac{y_1}{r_1} \tag{1}$$

où

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

L'intégrale des aires donne

$$x_1\frac{dy_1}{dt_1} - y_1\frac{dx_1}{dt_1} = \alpha.$$

Faisons maintenant la transformation homographique

$$x = \frac{x_1}{y_1}, \quad y = \frac{1}{y_1} \tag{2}$$

---

*Comptes Rendus, t. 84.

et posons
$$dt = \frac{dt_1}{y_1^2};$$
nous aurons
$$\frac{dx}{dt} = \frac{y\dfrac{dx_1}{dt_1} - x_1\dfrac{dy_1}{dt_1}}{y_1^2}\cdot\frac{dt_1}{dt} = \alpha,\quad \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{y_1^2}\,\frac{dy_1}{dt_1}\,\frac{dt_1}{dt} = -\frac{dy_1}{dt_1},$$
puis
$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0,\quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{d^2y_1}{dt_1^2}\cdot\frac{dt_1}{dt} = -F_1\frac{y_1^3}{r_1}. \tag{3}$$

Ces équations montrent que le point (x, y) se meut, dans le temps t, comme un mobile sollicité par une force
$$Y = -F_1\frac{y_1^3}{r_1} \tag{4}$$
constamment parallèle à l'axe Oy. Cette force Y est d'ailleurs fonction de x_1 et y_1, et par suite, d'après (2), de x et y. Si le point (x_1, y_1) décrit une conique, le point (x, y) en décrit une autre, transformée homographique de la première, et inversement. Nous sommes donc ramenés à chercher toutes les lois de forces parallèles Y faisant décrire à leur point d'application (x, y) une conique, quelles que soient les conditions initiales. Or ce problème se résout comme il suit.

Les équations du mouvement étant
$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0,\quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y,$$
on a $\dfrac{dx}{dt} = \alpha$ et l'équation différentielle de la trajectoire est
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\alpha^2}Y, \tag{5}$$
Y étant une fonction de x et y. Désignons par y', y'', y''', ... les dérivées de y par rapport à x, et rappelons nous que l'équation différentielle des coniques est, d'après Halphen
$$[(y'')^{-\frac{2}{3}}]''' = 0.$$

L'expression (5) de y'' devra vérifier cette équation, quelles que soient les conditions initiales. Soit, en désignant par μ une constante,
$$Y^{-\frac{2}{3}} = \mu^{-\frac{2}{3}}\varphi(x, y),\quad Y = \mu[\varphi(x, y)]^{-\frac{3}{2}} \tag{6}$$

on devra avoir $[\phi(x, y)]''' = 0$. Développant les calculs, on a

$$[\phi(x, y)]' = \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y} y',$$

$$\phi'' = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + 2y' \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} + y'^2 \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + y'' \frac{\partial\phi}{\partial y},$$

$$\phi''' = \frac{\partial^3\phi}{\partial x^3} + 3y' \frac{\partial^3\phi}{\partial x^2\partial y} + 3y'^2 \frac{\partial^3\phi}{\partial x\partial y^2} + y'^3 \frac{\partial^3\phi}{\partial y^3} + 3y'' \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} + y' \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right) + y''' \frac{\partial\phi}{\partial y}.$$

Comme
$$y'' = \frac{\mu}{\alpha^2} \phi^{-\frac{3}{2}}, \quad y''' = -\frac{3}{2} \frac{\mu}{\alpha^2} \phi^{-\frac{5}{2}} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} + y' \frac{\partial\phi}{\partial y}\right),$$

l'équation $\phi''' = 0$ s'écrit

$$\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3} + 3y' \frac{\partial^3\phi}{\partial x^2\partial y} + 3y'^2 \frac{\partial^3\phi}{\partial x\partial y^2} + y'^3 \frac{\partial^3\phi}{\partial y^3} + \frac{3\mu}{2\alpha^2} \phi^{-\frac{5}{2}} \left[2\phi \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial\phi}{\partial y}\right] + \frac{3\mu y'}{2\alpha^2} \phi^{-\frac{5}{2}} \left[2\phi \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right] = 0.$$

Cette condition devant être remplie quelles que soient les conditions initiales, devra être vérifiée identiquement quels que soient x, y, y' et α, puisque, au commencement du mouvement, ces quatre quantités sont arbitraires. On a donc

$$\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3} = 0, \quad \frac{\partial^3\phi}{\partial x^2\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^3\phi}{\partial x\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3\phi}{\partial y^3} = 0, \tag{7}$$

$$2\phi \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0, \quad 2\phi \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 = 0. \tag{8}$$

Les condition (7) montrent que ϕ est un polynôme du second degré en x et y

$$\phi(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F.$$

Ce polynôme devant vérifier les conditions (8), deux cas sont à distinguer suivant que C est différent de zéro ou non.

1°. $C \gtrless 0$. Alors $\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 2C$; la seconde des identités (8) donne

$$\phi = \frac{1}{C} (Bx + Cy + E)^2,$$

expression qui satisfait aussi à la première des identités (8), comme on le vérifie immédiatement.

2°. $C=0$. Alors, la seconde des identités (8) donne $\frac{\partial\phi}{\partial y}=0$, ϕ ne dépend donc pas de y; l'on a

$$B=C=E=0,$$
$$\phi=Ax^2+2Dx+F;$$

et la première des identités (8) est évidemment satisfaite.

Il y a donc deux lois de forces parallèles répondant à la question: ce sont, d'après (6) les lois exprimées par les formules

$$Y=\frac{\mu C^{\frac{3}{2}}}{(Bx+Cy+E)^3},$$
$$Y=\frac{\mu}{(Ax^2+2Dx+F)^{\frac{3}{2}}}.$$

Il y a donc également deux lois de forces centrales répondant à la question. D'après les formules de transformation (2) et (4)

$$x=\frac{x_1}{y_1},\quad y=\frac{1}{y_1},\quad F_1=-\frac{Yr_1}{y_1^3},$$

elles sont données par les formules

$$F_1=-\frac{\mu r_1 C^{\frac{3}{2}}}{(Bx_1+Ey_1+C)^3},$$
$$F_1=-\frac{\mu r_1}{(Ax_1^2+2Dx_1y_1+Fy_1^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ce sont bien les deux lois de forces découvertes par MM. Darboux et Halphen.

Remarque. Il est aisé d'étendre les résultats précédents au mouvement d'un point sur une sphère fixe, à l'aide des considérations qui suivent. L'analogie entre les mouvements d'un point sur une sphère et ceux d'un point dans un plan a été signalée depuis longtemps, notamment par M. Paul Serret dans sa thèse: *Sur les propriétés géométriques et mécaniques des lignes à double courbure.* On trouve l'explication de cette analogie dans une transformation semblable à la transformation homographique que nous avons étudiée antérieurement (*American Journal,* t. XII, No. 1). Cette nouvelle transformation fait correspondre, à tout mouvement d'un point dans un plan sous l'action d'une force dépendant uniquement de la position du mobile, le mouvement d'un point sur une sphère sous l'action d'une force dependant uniquement de la position du mobile; et réciproquement.

Etant donnée une sphère (S) de rayon 1 et un plan tangent (P) à cette sphère, nous ferons correspondre, à un point M_1 de la sphère, la projection M de ce point sur le plan (P) faite par le rayon allant du centre au point M_1: c'est la projection bien connue que l'on appelle *centrale* dans la théorie des cartes géographiques; elle fait correspondre à toutes les droites du plan (P) des grands cercles de la sphère (S) et réciproquement. Au point de vue analytique, si l'on prend le point de contact du plan (P) et de la sphère (S) comme pôle d'un système de coordonnées polaires dans le plan et sur la sphère, on aura, en appelant ρ et ω les coordonnées polaires du point M dans le plan, ϕ et θ les coordonnées polaires du point M_1 sur la sphère (ϕ colatitude et θ longitude), les formules de transformation

$$\rho = \operatorname{tang} \phi, \quad \omega = \theta. \tag{a}$$

Si l'on appelle T la demi-force vive d'un point matériel de masse 1 mobile dans le plan (P), on aura

$$T = \frac{1}{2}(\rho'^2 + \rho^2\omega'^2), \quad \rho' = \frac{d\rho}{dt}, \quad \omega' = \frac{d\omega}{dt}$$

et les équations du mouvement seront d'après Lagrange

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 = R, \quad \frac{d}{dt}\left(\rho^2\frac{d\omega}{dt}\right) = \Omega, \tag{b}$$

R et Ω étant des fonctions de ρ et ω. De même, si l'on appelle T_1 la demi-force vive d'un point sur la sphère, ce point ayant pour masse 1 et se déplaçant pendant le temps t_1, on aura

$$T_1 = \frac{1}{2}(\phi'^2 + \sin^2\phi . \theta'^2), \quad \phi' = \frac{d\phi}{dt_1}, \quad \theta' = \frac{d\theta}{dt},$$

et les équations du mouvement de ce point seront

$$\frac{d^2\phi}{dt_1^2} - \sin\phi\cos\phi\left(\frac{d\theta}{dt_1}\right)^2 = \Phi, \quad \frac{d}{dt_1}\left(\sin^2\phi\frac{d\theta}{dt_1}\right) = \Theta, \tag{c}$$

Φ et Θ étant des fonctions de ϕ et θ. Faisons, sur les équations (b) du mouvement plan, la transformation définie par les formules (a) de la projection centrale et établissons entre les temps t et t_1 la relation

$$dt_1 = \cos^2\phi . dt.$$

Nous verrons, par un calcul élémentaire, que les équations (b) prendront la forme (c) où

$$\Phi = \frac{R}{\cos^2\phi}, \quad \Theta = \frac{\Omega}{\cos^2\phi}.$$

Donc à tout mouvement sur le plan correspond un mouvement sur la sphère et réciproquement: la trajectoire de l'un des points est la transformée de la trajectoire de l'autre par projection centrale. Par exemple, si les forces R et Ω sont nulles, le point M décrit une droite dans le plan, les forces Φ et Θ sont nulles aussi et le point M_1 décrit une ligne géodésique de la sphère. Si le point M décrit une conique dans le plan, le point M_1 décrit une conique sphérique et inversement. Pour obtenir toutes les lois de forces dépendant de la position de leur point d'application et faisant décrire à un point mobile sur une sphère une conique sphérique, il suffira donc de trouver dans le plan les lois de forces faisant décrire à leur point d'application une conique (lois trouvées par MM. Darboux et Halphen), puis de leur appliquer la transformation précédente.

On pourrait de même chercher à transformer le mouvement d'un point sur un plan en un mouvement d'un point sur une surface donnée: ce serait là un cas particulier du problème général que nous avons indiqué d'après M. Goursat à la fin du précédent article (*American Journal*, t. XII, p. 114). Pour qu'aux lignes droites du plan correspondent les lignes géodésiques de la surface il faut, d'après un théorème de M. Beltrami, que la surface soit à *courbure constante* (Voyez: Leçons sur la théorie générale des surfaces par M. Darboux, III partie, chapitre III).